

Лабораторная работа № 10

«МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В БИОЛОГИИ. ДИНАМИКА ПОПУЛЯЦИЙ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ И ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС»

Колебания температуры и влажности в течение вегетативного сезона могут существенным образом влиять на размножение особей в популяции вплоть до полной синхронизации с условиями обитания в благоприятное время года. Подобное варьирование численности значительно усложняет описание динамики популяций при помощи дифференциальных уравнений, поэтому часто в этом случае используются так называемые *отображения* – разностные уравнения.

Модели популяций с неперекрывающимися поколениями используют для описания динамики численности у тех видов, у которых родительские особи не доживают до половозрелости и репродуктивного возраста своих потомков (растения–однолетники, насекомые, некоторые рыбы и др.). В таких случаях рост и развитие в зависимости от плотности в таких популяциях характеризуют отображения Риккера (1) или Хассела (2):

$$x_{n+1} = x_n \cdot \exp^{r \cdot (1 - x_n/K)} \quad (1)$$

$$x_{n+1} = x_n \cdot r / (1 + k \cdot x_n/K)^\alpha \quad (2)$$

Здесь x_n и x_{n+1} – численность популяции соответственно в n -й и $n+1$ -й сезоны (или поколения), r – удельная скорость роста популяции, K – предел емкости среды (лимитирующего ресурса), k – параметр масштабирования (коэффициент), α – параметр нелинейности.

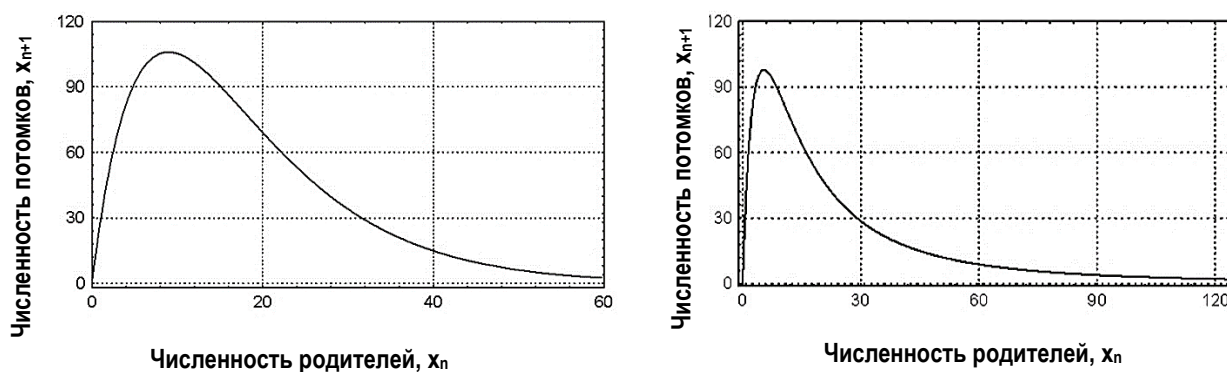


Рисунок 1 – Отображение Риккера (слева) и Хассела (справа)

В данных отображениях учитывается, что с ростом численности популяции (x_n) относительная скорость ее прироста уменьшается (рисунок 1).

Расчеты показывают, что в зависимости от показателя параметра r рассматриваемые модели популяций демонстрируют несколько типов динамического поведения (рисунок 2):

- 1) стационарное состояние (при $0 \leq r \leq 2$);

- 2) колебание численности различного периода, или предельные циклы (при $2 \leq r \leq 2,692$);
- 3) детерминированный хаос, или аperiодические колебания ($r > 2,692$).

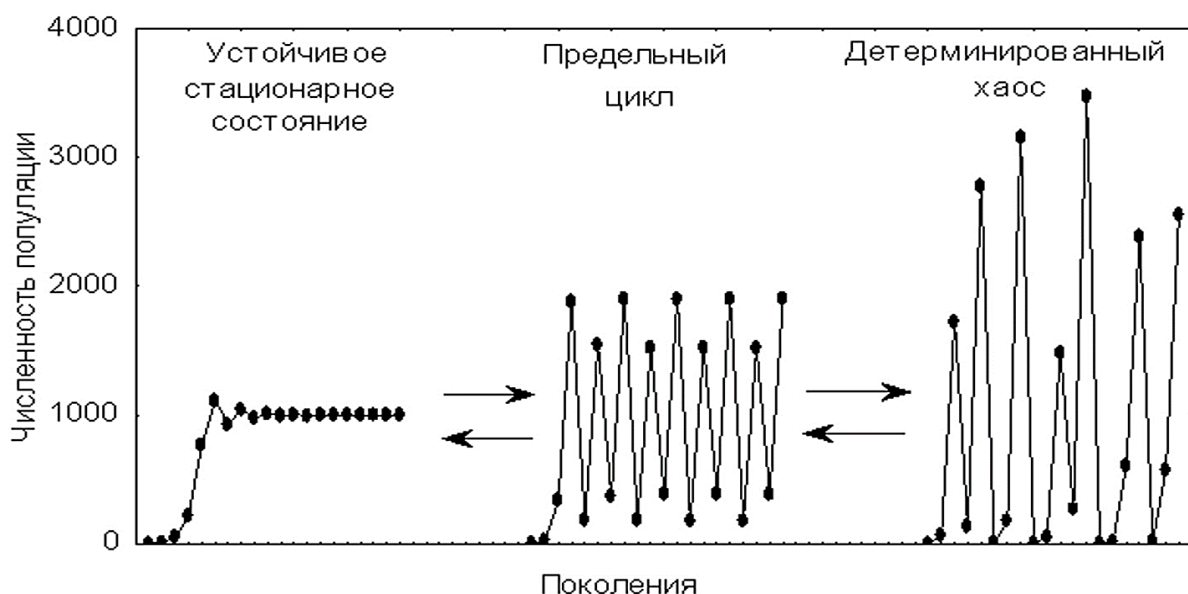


Рисунок 2 – Типы динамического поведения и переходы между ними

Задание. В генетической лаборатории для проведения экспериментов разводили плодовую мушку *Drosophila melanogaster* в пробирках на питательной среде. Постоянно проводился подсчет потомков в нескольких поколениях (таблица 1).

Таблица 1 – Поколения *Drosophila melanogaster*

Время, поколения	Численность популяции, x_n	Число потомков, x_{n+1}
1	2	3
0	1	15
1	15	114
2	114	8
3	8	91
4	91	19
5	19	116
6	116	8
7	8	90
8	90	20
9	20	123
10	123	6
11	6	73
12	73	38

Окончание таблицы 1

1	2	3
13	38	99
14	99	15
15	15	130
16	130	4
17	4	64

Проведите анализ данных по поколениям дрозофилы, определите отображение, которым описывается динамика изучаемой популяции, рассчитайте кинетические параметры и определите тип динамического режима изменения численности популяции.

Решение

Для начала необходимо сделать рабочую таблицу в редакторе электронных таблиц и отобразить график динамики численности для чего по оси абсцисс откладываем количество особей в популяции, а по оси ординат – поколения. Полученный график сравните с рисунком 3.

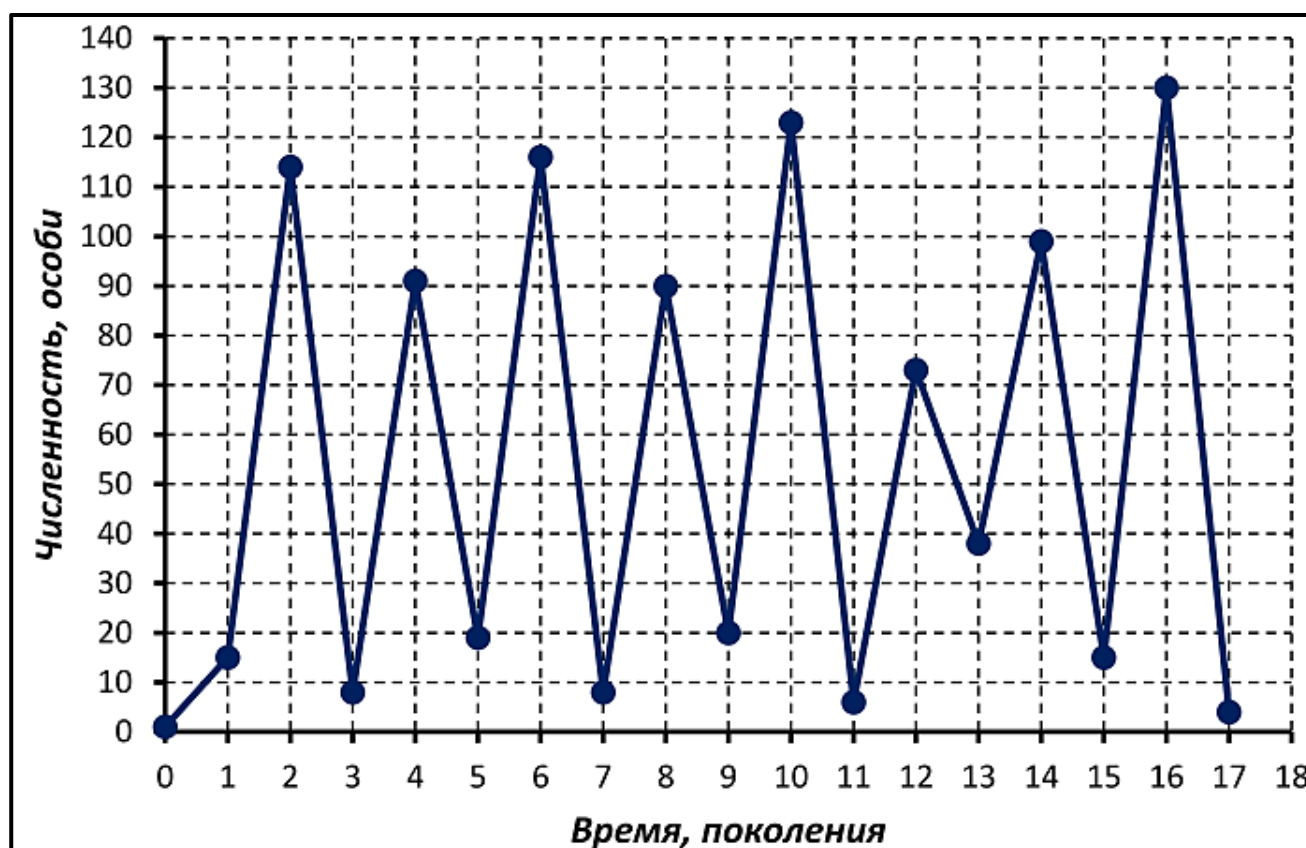


Рисунок 3 – Колебания численности *Drosophila melanogaster* в лаборатории

Подобные колебания численности как на графике подобны таким моделям динамического поведения как предельный цикл, так и детерминированный хаос. Для более точного ответа рассмотрим ещё несколько показателей.

Так, чтобы определить отображение, которому соответствует динамика численности дрозофилы необходимо сделать диаграмму рассеивания (точечный график), где по оси абсцисс откладывается численность родителей, а по оси ординат – численность потомков. Затем на график следует добавить линию тренда (полиномиальную четвертой степени). Сравните полученный график с рисунком 4.

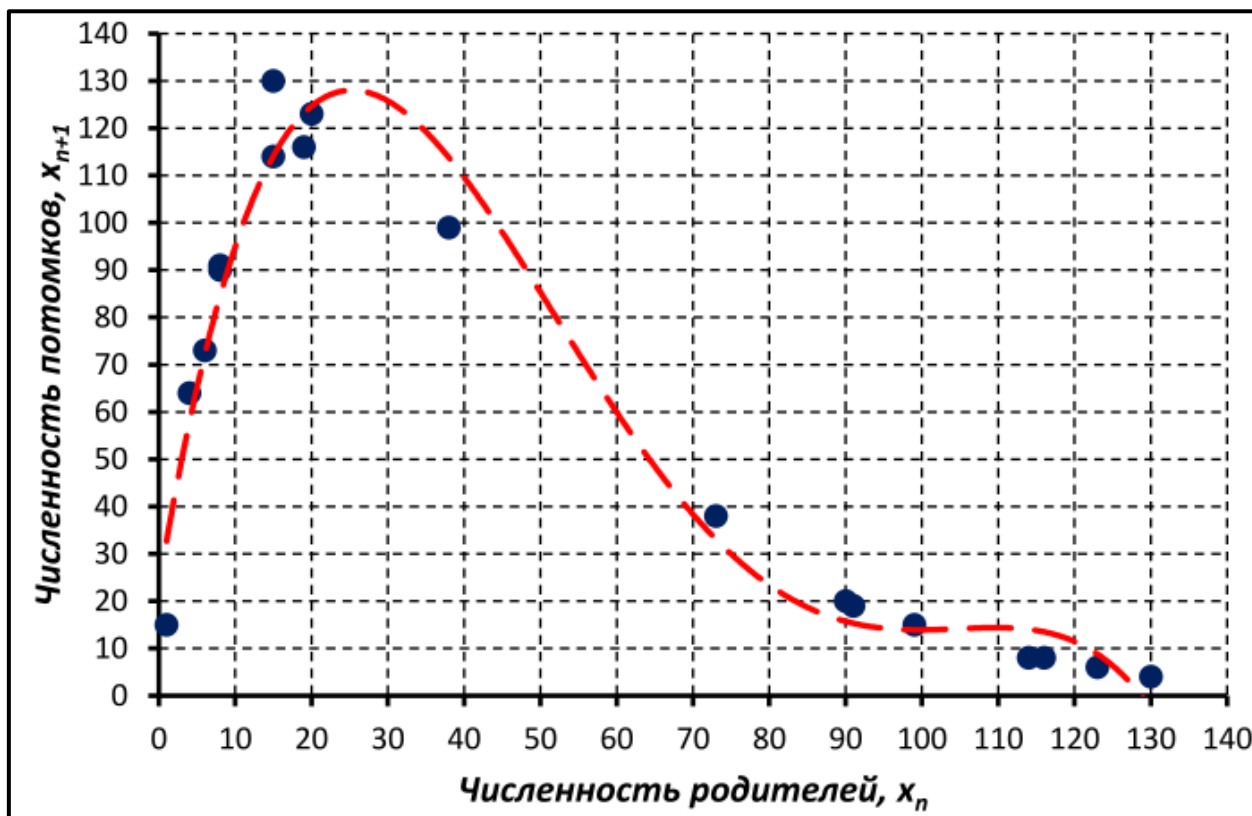


Рисунок 4 – Соотношение численности родителей *Drosophila melanogaster* и их потомков в лаборатории

Получившаяся линия тренда соответствует отражению Риккера. Для выявления типа динамического равновесия необходимо определить кинетические параметры r и K .

Для этого необходимо ввести в рабочую таблицу дополнительную переменную (четвертый столбец) для линеаризации численности родителей и их потомков:

$$\ln \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Сравните полученный результат с рисунком 5.

	A	B	C	D
1	Время, поколения	Численность популяции, x_n	Число потомков, x_{n+1}	$\ln(x_{n+1}/x_n)$
2	0	1	15	2,708050201
3	1	15	114	2,028148247
4	2	114	8	-2,656756907
5	3	8	91	2,431417965
6	4	91	19	-1,566420527
7	5	19	116	1,809151212
8	6	116	8	-2,674148649
9	7	8	90	2,420368129
10	8	90	20	-1,504077397
11	9	20	123	1,816452082
12	10	123	6	-3,020424886
13	11	6	73	2,498699972
14	12	73	38	-0,652873281
15	13	38	99	0,95753369
16	14	99	15	-1,887069649
17	15	15	130	2,159484249
18	16	130	4	-3,481240089
19	17	4	64	2,772588722

Рисунок 5 –Рабочая таблица численности родителей *Drosophila melanogaster* и их потомков в лаборатории

Полученные результаты необходимо отобразить на графике, где по оси абсцисс откладываются значения численности родителей, а по оси ординат – линеаризация отношения численности родителей и их потомков. Полученный график сравните с рисунком 6.

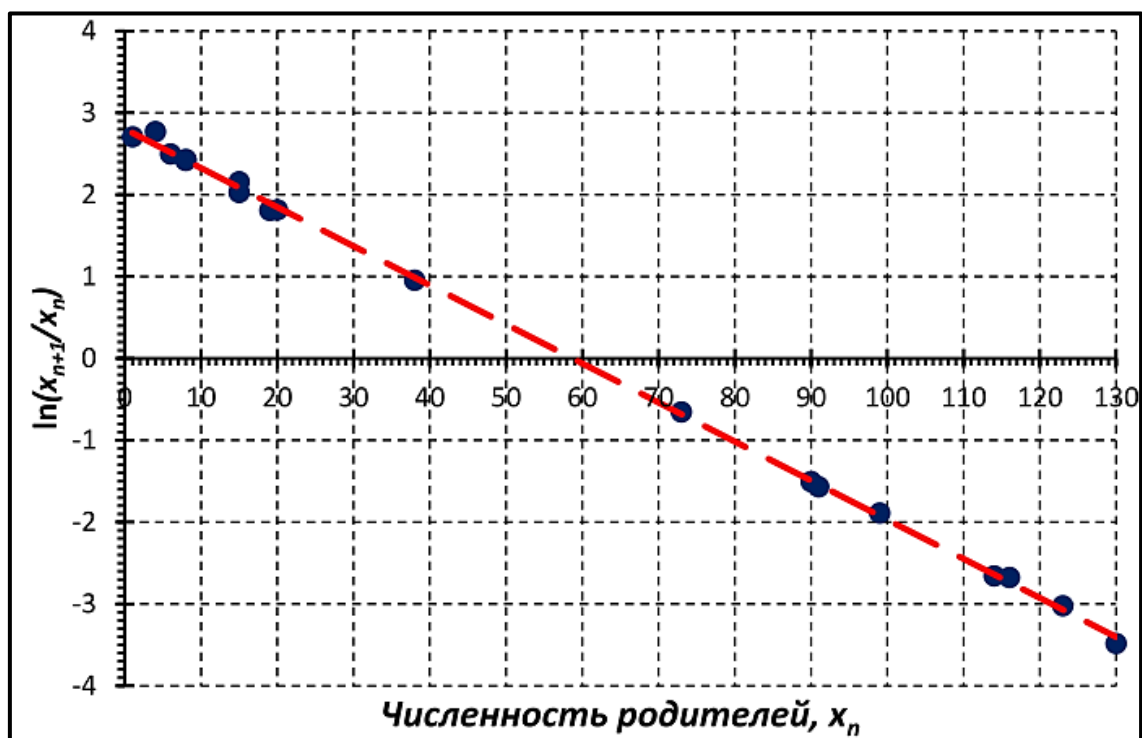


Рисунок 6 –Линеаризация отношений численности *Drosophila melanogaster*

Пересечение линии тренда с осью абсцисс дает значение емкости среды (K), а с осью ординат – скорости размножения (r). В нашем случае это 59 и 2,8 соответственно. Таким образом, можно сказать, что так как значение r превышает показатель 2,692 динамическое поведение популяции дрозофилы соответствует типу детерминированного хаоса.

Задания для самоконтроля

1) На станции разведения божьих коровок в целях биологической борьбы с тлей проводили эксперимент с 20-ю поколениями семиточечной божьей коровки (*Coccinella septempunctata*):

Поколение	x_n	x_{n+1}	Поколение	x_n	x_{n+1}
0	6	100	10	102	77
1	100	90	11	77	93
2	90	81	12	93	75
3	81	89	13	75	89
4	89	95	14	89	101
5	95	110	15	101	87
6	110	86	16	87	99
7	86	91	17	99	79
8	91	88	18	79	87
9	88	102	19	87	68

Проведите анализ данных по поколениям семиточечной божьей коровки, определите отображение, которым описывается динамика изучаемой популяции, рассчитайте кинетические параметры и определите тип динамического режима изменения численности популяции.

2) В заказнике на Дальнем Востоке проводились исследования по численности кеты (*Oncorhynchus keta*) в течение 10 лет:

Год	x_n	x_{n+1}	Год	x_n	x_{n+1}
1995	2	88	2000	74	42
1996	88	40	2001	42	93
1997	40	82	2002	93	51
1998	82	38	2003	51	96
1999	38	74	2004	96	44

Проведите анализ данных по поколениям кеты, определите отображение, которым описывается динамика изучаемой популяции, рассчитайте кинетические параметры и определите тип динамического режима изменения численности популяции.